



ISSN 2029–2236 (print)  
ISSN 2029–2244 (online)  
SOCIALINIŲ MOKSLŲ STUDIJOS  
SOCIAL SCIENCES STUDIES  
2010, 3(7), p. 59–79.

## TVARAUS PENSIJOS PORTFELIO SUDARYMAS DINAMINIŲ STOCHASTINIŲ IMITACINIŲ MODELIAVIMU

Aušra Klimavičienė

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Verslo vadybos fakulteto  
Finansų inžinerijos katedra  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva  
Telefonas (+370 5) 2744 861  
Elektroninis paštas [ausra\\_klimaviciene@yahoo.com](mailto:ausra_klimaviciene@yahoo.com)

Pateikta 2010 m. gegužės 26 d., parengta spausdinti 2010 m. rugpjūčio 6 d.

**Anotacija.** Straipsnyje nagrinėjama aktuali tvaraus pensijos portfelio sudarymo problema, analizuojami ankstesnių mokslinių šios srities tyrimų rezultatai, aptariami pasirinkti (euristinis, daugelio horizontų ir stochastinio optimizavimo) pensijos portfelio sudarymo metodai. Pasielkiant dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo ir stochastinio optimizavimo galimybes portfelio sudėties nustatymo metodams analizuoti sudaromi dinaminiai stochastiniai imitaciniai modeliai, kuriais skaičiuojama portfelio poreikio tikimybė esant stochastinei akcijų ir obligacijų rinkų grąžai. Išanalizavus tyrimo rezultatus pateikiamos tvaraus pensijos portfelio sudarymo metodų pastoviam planuojamam pensijos laikotarpiui tyrimo išvados ir rekomendacijos dėl pensijos portfelio metodų taikymo praktikoje.

**Reikšminiai žodžiai:** tvarus pensijos portfelis, pensijos portfelio sudarymo metodai, stochastinis optimizavimas, portfelio poreikio tikimybė.

## Įvadas

Pasaulio ir šalies ekonomikos nestabilumas, ilgėjanti gyvenimo trukmė, mažėjantis gimstamumas kelia rimtų iššūkių valstybinei pensijų sistemai, didina gyventojų nesaugumą dėl pajamų pensiniame amžiuje, todėl pensijos planavimo, finansinių išteklių kaupimo pensiniam amžiui klausimai tampa vis aktualesni tiek visame pasaulyje, tiek Lietuvoje. Dauguma vis dar tikisi, kad pensija pasirūpins valstybinio socialinio draudimo sistema, nėra susipažinę ir neišnaudoja kitų galimybių kaupti pensiją. Vis dėlto ateityje neišvengiamai vis didesnė atsakomybė už finansinę gerovę pensiniame amžiuje teks namų ūkiams ar asmenims, tad pensijų planavimo ir valdymo metodams bus skiriamas vis didesnis dėmesys. Ateityje vis aktualesni taps portfelio valdymo pensijos laikotarpiu klausimai: kaip sudaryti tvarų pensijos portfelį įvertinant stochastinę asmens gyvenimo trukmės prigimtį, kada ir ar iš viso portfelį reikėtų rebalansuoti, kokia tikimybė, kad portfelis bus tvarus visą pensijos laikotarpį? Siekis atsakyti į šiuos klausimus lemia pensijos portfelio tvarumą užtikrinančių metodų paieškos aktualumą.

Tvaraus pensijos portfelio sudarymo problematika nagrinėjama R. G. Stouto, J. B. Mitchello, J. T. Guytono, W. J. Klingerio, P. L. Cooley, C. M. Hubbardo, D. T. Walzo, W. P. Bengeno darbuose, tačiau portfelio sudarymo metodo pasirinkimo siekiant didžiausio galimo pensijos portfelio tvarumo klausimai nėra plačiai nagrinėti.

Šio *straipsnio tikslas* – išanalizuoti pensijos portfeliui sudaryti taikomus metodus naudojantis dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo galimybėmis ir pateikti rekomendacijas dėl metodų taikymo praktikoje siekiant užtikrinti didžiausią galimą portfelio tvarumą.

*Tyrimų objektas* – optimali pensijos portfelio sudėtis: optimalaus pensijos portfelio sudarymo metodai, portfelio rebalansavimo strategijos, stochastinių kintamųjų įtraukimas į pensijos portfelio optimizavimo modelį.

Tikslui pasiekti taikomi analizės, apibendrinimo, scenarijų sudarymo, palyginimo metodai. Empiriniuose tyrimuose taikyti aprašomosios statistikos metodai, Kolmogorovo-Smirnovo testai, koreliacijos-dispersijos analizė, dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo technika, stochastinis optimizavimas.

## 1. Pensijos portfelio sudarymo problematika

Šiandien pensinio amžiaus žmonės priima vis sudėtingesnius finansinius sprendimus. Praeityje liko tie laikai, kai buvo galima pasikliauti vien valstybine pensijų sistema. Pensijos draudimo, pensijų fondų atsiradimas, pensijų reforma skatina vis daugiau žmonių kaupti ir investuoti pensiniam amžiui savarankiškai. Tikimasi, kad pensinio amžiaus sulaukę žmonės patys finansuos didžiąją dalį savo išlaidų, tačiau dėl ilgėjančios gyvenimo trukmės, ankstyvo išėjimo į pensiją žmonių santaupos turi būti pakankamos finansuoti ir ilgesnio nei įprasta pensijos laikotarpio išlaidas. Ši atsakomybė neįgyvendinama be aiškios investicijų strategijos, apibrėžiančios investicinius sprendimus, ir išlaidų strategijos, atskleidžiančios vartojimo sprendimus. W. F. Sharpe'as, J. S. Scottas ir

J. G. Watsonas<sup>1</sup> investicijų ir išlaidų strategijos visumą apibūdina kaip pensijos finansų strategiją.

2008 m. prasidėjusi finansų krizė smarkiai paveikė tuos, kurie neseniai išėjo į pensiją ar ketina taip padaryti per artimiausius penkerius ar dešimtį metų. Nekilnojamojo turto kainų kritimas apribojo galimybę nekilnojamąjį turtą naudoti kaip pajamų šaltinį išlaidoms finansuoti. Gerokai konservatyvesnė bankų kreditavimo politika dar labiau apsunkino nekilnojamojo turto savininkų galimybes pasinaudoti šia finansavimo priemone. Smarkus akcijų rinkos kritimas sumažino asmeninių santaupų ir pensijų fondų vertę.

J. Klementas<sup>2</sup> pateikia statistikos duomenis, rodančius, kad 401 (k) sąskaitose sukauptos sumos per pirmuosius dešimt 2008-ųjų metų mėnesių krito daugiau nei 20 %. JAV 401 (k) pensijos kaupimo planas leidžia darbuotojui taupyti pensijai. Sąskaitoje esančios lėšos investuojamos, pajamų mokestis atidedamas iki santaupų naudojimo momento. Darbuotojo pasirinkta atlyginimo dalis pervedama į šią sąskaitą. Darbdavys savo ruožtu gali pervesti tam tikrą procentą nuo atlyginimo darbuotojų motyvacijos ir kitais tikslais

Kritusi turto ir santaupų vertė, ilgesnė gyvenimo trukmė, didesnės sveikatos ir ilgalaikės priežiūros paslaugų kainos, aktyvesnis pensinio amžiaus žmonių gyvenimo būdas lemia didesnių pajamų pensijos laikotarpiu poreikį. J. Klementas<sup>3</sup> mano, kad neišvengiamai šiuo metu išėjusių į pensiją asmenų ištekčiai bus ne tik nepakankami visiems troškimams įgyvendinti, bet ir kasdieniams poreikiams patenkinti visą jų likusį gyvenimą. Jie bus tiesiog nepajėgūs mokėti už tokį gyvenimo būdą, kurio tikėjosi ir svajojo, tokį, kuriuo mėgavosi ankstesnės kartos.

Įvertinti pajamų poreikį pensijos laikotarpiu atsižvelgiant į asmens poreikius, tikslus ir norus galima įvairiais metodais, tačiau šiame straipsnyje siekiama nustatyti, kaip portfelio sudėtis gali pailginti santaupų tvarumą ir net padidinti jų grąžą. Nesitikima, kad būsimas pensinio amžiaus žmogus galės gyventi iš dividendų ir palūkanų – jis neišvengiamai turės panaudoti vartojimui ir pagrindinę santaupų sumą. Pensijos portfelis turi būti pakankamas finansuoti vartojimo išlaidas ilgą laikotarpį, o jo pereinamoji tikimybė turi būti minimali. I. Visco<sup>4</sup> teigia, kad finansų krizė parodė, kaip svarbu apsaugoti žmonių santaupas, skirtas pensiniam amžiui. Šiandien itin svarbi valstybės politika šioje srityje.

---

1 Sharpe, W. F.; Scott, J. S.; Watson, J. G. Efficient Retirement Financial Strategies. In *Recalibrating Retirement Spending and Saving*. Ameriks, J.; Mitchell, O. S. (eds.). Oxford: Oxford University Press, 2008, p. 210.

2 Klement, J. *Life is non-linear: Structuring retirement portfolios for the long haul* [interaktyvus]. UBS Wealth Management Research, Paper presented at the 23rd annual meeting of the Academy of Financial Services in Anaheim, CA, October 9-10, 2009 [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1480124](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1480124)>.

3 *Ibid.*

4 Visco, I. *Retirement savings and the payout phase: how to get there and how to get the most out of it* [interaktyvus]. Banca d'Italia. Speech at the OECD conference „The payout phase of pensions, annuities and financial markets“, Paris, 12 November 2008 [žiūrėta 2010-05-24]. <<http://www.oecd.org/dataoecd/55/51/41668605.pdf>>.

Pastarieji investuotojų elgsenos tyrimai rodo, kad nepaisant prioritetų, lūkesčių ir galimos rizikos investuotojų priimami portfelio sudarymo sprendimai nėra tinkami. J. Dominitzas ir A. Hung<sup>5</sup> teigia, kad investuotojai, sudarydami portfelį, linkę priimti sprendimus pasikliaudami paprastomis taisyklėmis. S. Benartzi ir R. H. Thaleris<sup>6</sup> taip pat pažymi, kad dažniausiai investuotojai, priimdami pensijos portfelio sudarymo sprendimus, remiasi keletu paprastų nykščio taisyklių. Viena tokių nykščio taisyklių yra investicijų diversifikavimo euristika, o jos kraštutinė forma pavadinta 1/n euristika. Tai reiškia, kad žmonės be profesionalios pagalbos tiesiog investuoja lygiomis dalimis į visus prieinamus investavimo objektus pensijos kaupimo fonde. Vėliau 1/n euristikos empirinius tyrimus atliko G. Hubermanas ir W. Jiang<sup>7</sup>, R. H. Thaleris ir S. Benartzi<sup>8</sup>. Jie taip pat nustatė, kad respondentai padalija investicijas po lygiai visoms jiems prieinamoms investicijų alternatyvoms.

Kitaip sakant, jei asmeniui siūlomi n investicijų variantai, jis kiekvienam pasiūlytų investicijų objektui skirs 1/n portfelio dalį nepaisydamas investicijų objekto rizikos charakteristikų ar savo lūkesčių ir prioritetų. Jei asmeniui pensijų fondų valdytojas siūlo investavimo kryptį, kurioje dominuoja akcijos ir tik nedidelę dalį sudaro obligacijos, tikėtina, kad investuotojas, nepaisydamas rizikos tolerancijos lygio, taip pat pasirinks didesnę akcijų dalį portfelyje. Galima daryti išvadą, kad investuotojo portfelio sudėtis priklauso nuo investavimo objektų pasiūlos (pvz., pensijų fondų investavimo kryptių pasiūla).

S. S. Iyengar ir W. Jiang<sup>9</sup>, priešingai, nustatė, kad suteikus papildomų investavimo galimybių pasirenkami konservatyvesni investavimo objektai. Tai reiškia, kad pensijos fondo dalyviai, kuriems siūloma didesnė akcijų dalis, pasirinks didesnę obligacijų dalį nei tuo atveju, jei jiems būtų siūloma mažesnė akcijų dalis.

J. Binswangeris ir K. G. Carman<sup>10</sup> nustatė, kad „nykščio taisyklės“ tipo investuotojų pensiniam amžiui sukaupta suma statistiškai reikšmingai nesiskiria nuo planuotojo tipo investuotojų sukauptos sumos. Būtų galima teigti, kad „nykščio taisyklė“ tarsi būtų išvesta kruopščiai planuojant investicijas pensijos amžiui. Turint galvoje, kad daugumai profesionalus finansų planavimas yra gana sudėtingas ir neprieinamas, ši tyrėjų išvada teikia daug vilčių. Antra vertus, mokslininkai nustatė, kad „nykščio taisyklės“ ir planuo-

- 
- 5 Dominitz, J.; Hung, A. *Retirement Savings Portfolio Management* [interaktyvus]. Michigan Retirement Research Center Research Paper No. WP 2006-138, November 2006. [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1095290](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1095290)>.
  - 6 Benartzi, S.; Thaler, R. H. Naive diversification strategies in defined contribution savings plans. *The American Economic Review*. 2001, 91: 79.
  - 7 Huberman, G.; Jiang, W. *The 1/N heuristic in 401(k) plans* [interaktyvus]. EFA 2004 Masstricht Meetings Paper No. 2036, 2004 [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=556117](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=556117)>.
  - 8 Thaler, R. H.; Benartzi, S. *The behavioral economics of retirement savings behavior*. AARP Public Policy Institute, University of Chicago, The Anderson School at UCLA, January 31, 2007.
  - 9 Iyengar, S. S.; Jiang, W. *The Psychological Costs of Ever Increasing Choice: A Fallback to the Sure Bet* [interaktyvus]. Columbia University Working Paper, 2005 [žiūrėta 2010-05-24]. <<http://www.reish.com/publications/pdf/psychcosts.pdf>>.
  - 10 Binswanger, J.; Carman, K. G. *How Real People Make Long-Term Decisions: The Case of Retirement Preparation* [interaktyvus]. CentER Discussion Paper Series No. 2009-73, September 9, 2009 [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1474262](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1474262)>.

tojo tipo investuotojai pensijai sukaupia daug didesnes sumas negu kita tiriamųjų grupė, kurios investuotojai dažniausiai priimdavo atsitiktinius investavimo sprendimus.

Mokslininkai sutaria, kad akcijų ir obligacijų santykį portfelyje lemia lytis, amžius ir pajamos: jaunesni, daugiau uždirbantys vyrai didesnę portfelio dalį skirs akcijoms. G. Bhandari ir R. Deavesas<sup>11</sup> nustatė, kad didesnę akcijų dalį taip pat rinkęsi išsilavinę, patyrę, konsultacijas investicijų valdymo klausimais gaunantys ir linkę planuoti asmenys.

Daug mokslinių tyrimų atlikta analizuojant pensijos planavimą kaupimo etape. Šiame straipsnyje apžvelgiamas pensijos portfelio sudarymas pensijos laikotarpiui, t. y. ne kaupimo, o sukaupto turto paskirstymo etapas. Pensijos portfelio sudarymą kaupimo etape analizavo H. Schleefas ir R. M. Eisingeris, M. Sotto *et al*, M. Abuizam ir kiti mokslininkai.

H. Schleefas ir R. M. Eisingeris<sup>12</sup> Monte Carlo imitacinio modeliavimo metodu analizuoja tam tikrus portfelio sudėties variantus siekiant sukaupti tam tikrą sumą nustatytu laiku ateityje. Padaryta išvada, kad gyvenimo ciklo fonduose sukauptos sumos neprilygsta pastovios sudėties portfelyje (pvz., 80 proc. akcijų ir 20 proc. obligacijų) sukauptai sumai.

M. Sotto ir bendraautorai<sup>13</sup> atliko gyvenimo ciklo fondų portfelių testavimą remdamiesi istoriniais duomenimis ir taikydami imitacinį modeliavimą. Akcijų dalies portfelyje mažinimas didėjant investuotojo amžiui pasiteisino tik testuojant naudojant istorinius duomenis. Imitaciniai modeliai patvirtino, kad tinkamiausia kaupiant pensijos laikotarpiui yra pastovios portfelio sudėties strategija.

Subalansuoti, arba gyvenimo stiliaus, fondai (angl. *life-style funds*) investicinių fondų rinkoje turi senas tradicijas, o gyvenimo ciklo fondai (angl. *life-cycle funds*) dar gana nauji. L. M. Viceira<sup>14</sup> teigia, kad gyvenimo stiliaus fondai remiasi rizika paremto investavimo (angl. *risk-based investing*) idėja arba nuostata, kad akcijų dalis portfelyje turi būti priklausoma nuo investuotojo rizikos tolerancijos ir investicijų laikotarpio. Gyvenimo ciklo fondai yra gyvenimo stiliaus fondų variantas, paremtas nuo amžiaus priklausomo investavimo (angl. *age-based investing*) idėja arba nuostata, kad jaunas investuotojas turi didesnę portfelio dalį skirti akcijoms dėl ilgesnio investavimo laikotarpio, o šią dalį mažinti pensiniam amžiui artėjant.

M. Abuizam<sup>15</sup> @RISK imitacinio modeliavimo būdu tyrė tam tikrų pastovios portfelio sudėties variantų įtaką portfelio vertei ir su ja susijusiai rizikai. Kiekvienam port-

- 11 Bhandari, G.; Deaves, R. Misinformed and informed asset allocation decisions of self-directed retirement plan members. *Journal of Economic Psychology*. 2008, 29: 473–490.
- 12 Schleef, H.; Eisinger, R. M. Hitting or missing the retirement target: Comparing contribution and asset allocation schemes of simulated portfolios. *Financial Services Review*. 2007, 16: 229–243.
- 13 Sotto, M., *et al*. *An Assessment of Life-Cycle Funds* [interaktyvus]. Center for Retirement Research at Boston College Working Paper No. 2008-10, May 2008 [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1156354](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1156354)>.
- 14 Viceira, L. M. *Life-Cycle funds* [interaktyvus]. Harvard Business School, Centre for Economic Policy Research, National Bureau of Economic Research, May 22, 2007 [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=988362](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=988362)>.
- 15 Abuizam, R. A Risk-Based Model For Retirement Planning. *Journal of Business & Economics Research*. 2009, 7(6): 31–44.

felio scenarijui modelis nustato rizikos vertę (angl. *value at risk*) VAR, kuri nusako mažiausią tikėtiną grąžą per numatomą investicijų laikotarpį. Tyrimu siekiama parodyti, kaip imitacinio modeliavimo technika gali būti taikoma sudarant optimalų portfelį.

Dėmesio optimalaus portfelio sudarymui pensijos laikotarpiui mokslinėje literatūroje skirta nedaug. Tradiciškai manoma, kad optimali portfelio sudėtis pensijos kaupimo etape ir paskirstymo etape turi būti skirtinga, kadangi kaupimo etape aktualus yra portfelio augimas, o paskirstymo etape akcentuojama galimybė iš portfelio gauti pajamų. Dėmesys pajamoms lėmė tai, kad dažniausiai būdavo rekomenduojama pensijos portfelį sudaryti iš pajamams teikiančių investicijų objektų, tokių kaip obligacijos, privilegijuotosios akcijos, didelius dividendus žadančios akcijos, indėliai. Pastovių pajamų investicijos tokiu atveju turėtų generuoti stabilų pajamų srautą, kuris būtų pakankamas finansuoti pagrindinius asmens poreikius. Tačiau šiuo metu išėjusiųjų į pensiją laukia paskirstymo etapas, kuris gali trukti 20, 30 ar dar daugiau metų, todėl tradicinis požiūris į pajamų užtikrinimą pensiniam amžiui turėtų pasikeisti.

Asmeninės santaupos, arba pensijos portfelis, padalytas tam tikru santykiu tarp turto klasių, naudojamas kaip pajamų šaltinis išimant iš portfelio tam tikrą jo dalį per tam tikrą laikotarpį. Lyginant su pensijos draudimu, šis pajamų pensijos laikotarpiu gavimo metodas, mokslinėje literatūroje dar vadinamas asmeninio anuiteto arba periodinių išėmimų strategija, yra daug lankstesnis, ankstyvos mirties atveju sukauptos sumos nepanaudotą likutį galima palikti paveldėtojams. I. Dusas, R. Maureris ir O. S. Mitchell<sup>16</sup> teigia, kad pensijos reforma Europoje ir JAV paskatino išėmimų strategijos populiarėjimą pasaulyje. Pavyzdžiui, Vokietijoje atsirado Riesterio planai, mokesčių atidėjimu skatinantys asmenis savanoriškai kaupti pensijai. Išėjus į pensiją galima išimti 30 % pagal šį planą sukauptų lėšų, o likusią sumą privaloma skirti pensijų draudimui, kuri siūlo draudimo kompanijos, arba išsimokėti taikant periodinių išėmimų strategiją, šią funkciją perleidžiant investiciniam fondui arba bankui. Sulaukus 85-erių visa likusi suma skiriama pensijų draudimui įsigyti. Jungtinėje Karalystėje privati pensija jau yra tapusi norma, o dalis sukauptos sumos privalo būti skirta anuitetui sulaukus 75-erių. Kanadoje 69-erių metų sulaukęs asmuo už sukauptas santaupas privalo arba įsigyti pensijų draudimą, arba susidaryti planą vadovaudamasis periodinių išėmimų strategija<sup>17</sup>. JAV pensijų draudimas nėra privalomas turint 401 (k) sąskaitą, tad čia tapo įprasta asmeniui savarankiškai valdyti pensijos portfelį. Šios tendencijos rodo augantį domėjimąsi turto paskirstymo pensijos laikotarpiu procesu, tvaraus pensijos portfelio sudarymo aktualumą.

## 2. Pensijos planavimas ir investicijos

Pensijos portfelio tvarumo problemai skirta nemažai mokslinių tyrimų, tačiau dauguma jų siekia nustatyti ne optimalią portfelio sudėtį, o didžiausią galimą iš portfelio išimti sumą. Procentinė šios sumos išraiška nuo pradinės portfelio vertės vadinama

16 Dus, I.; Maurer, R.; Mitchell, O. S. Betting on Death and Capital Markets in Retirement: A Shortfall Risk Analysis of Life Annuities versus Phased Withdrawal Plans. *Financial Services Review*. 2005, 14: 170.

17 *Ibid.*, p. 171.

išėmimo norma. Dažniausiai tyrimuose testuojami keli hipotetiniai portfelio sudėties variantai, nustatomos maksimalios galimos išėmimo normos esant tam tikrai portfelio sudėčiai. Tiriant taikomi tiek imitacinio modeliavimo, tiek testavimo remiantis istoriniais rinkų duomenimis metodai.

W. P. Bengenas<sup>18</sup>, remdamasis istoriniais duomenimis, nustatė, kad akcijos tipiniame portfelyje pensiniame amžiuje turėtų sudaryti nuo 50 % iki 75 % portfelio, tokiu atveju taikant 4 % išėmimo normą, pakoreguotą pagal infliaciją, portfelis būtų tvarus finansuoti išėmimus iš jo 35-erius metus. W. P. Bengenas<sup>19</sup> pasiūlė akcijų dalį portfelyje pensinio amžiaus laikotarpiu kasmet mažinti po 1 % pagal formules: 115 minus amžius konservatyviam investuotojui; 128 minus amžius nuosaikiam investuotojui ir 140 minus amžius agresyviai investuotojui. Visais atvejais tvari išėmimo norma nekinta ir yra lygi 3–4 %. Vėliau W. P. Bengenas<sup>20</sup> ieškojo alternatyvių išėmimų iš portfelio pensiniame amžiuje strategijų. Pensijos laikotarpį suskirsčius į tris skirtingos elgsenos etapus ir kiekvienam etapui nustačius skirtingą išėmimo normą, gali būti pasiektas didesnis portfelio tvarumas. Taip pat W. P. Bengeno pasiūlyta išėmimo normos grindų (leistinas sumažėjimas ne daugiau kaip 10 % pirmųjų metų išėmimo sumos) ir lubų (leistinas padidėjimas ne didesnis kaip 25 % pirmųjų metų išėmimo sumos) strategija leido pasiekti 4,58 % maksimalią saugią išėmimo normą, net 10 % didesnę nei tradicinės strategijos, kai išėmimo norma tėra kasmet pakoreguojama infliacijos dydžiu, atveju.

P. L. Cooley, C. M. Hubbardas ir D. T. Waltzas<sup>21</sup>, taikydami slenkančių laikotarpių metodologiją, analizavo diversifikavimo įtaką tvarioms išėmimo normoms. Jie atskleidė, kad 6–7 % išėmimo norma yra tvari daugeliu laikotarpių, jei akcijos sudaro ne mažiau kaip 50 % portfelio. Vėliau P. L. Cooley, C. M. Hubbardas ir D. T. Waltzas<sup>22</sup> nagrinėjo išėmimo normų tvarumo skirtumus, lygindami slenkančių laikotarpių ir Monte Carlo imitacinio modeliavimo metodus. Nustatyta, kad 4 % išėmimo norma yra tvari 30 metų esant 75 % sėkmės tikimybei, kai akcijos bei obligacijos portfelyje sudaro po 50 %.

J. Amerikšas, R. Veresas ir M. J. Warshawsky<sup>23</sup> testavo kitų autorių nustatytą 4,5 % tvarią išėmimo normą taip pat dviem – slenkančių laikotarpių ir Monte Carlo imitacinio modeliavimo – metodais. Jie patvirtino W. P. Bengeno<sup>24</sup> ir G. B. Pye<sup>25</sup> portfelio

- 
- 18 Bengen, W. P. Determining withdrawal rates using historical data. *Journal of Financial Planning*. 1994, 7(4): 171–180.
- 19 Bengen, W. P. Asset allocation for a lifetime. *Journal of Financial Planning*. 1996, 9(4): 58–67.
- 20 Bengen, W. P. Conserving client portfolios during retirement, part IV. *Journal of Financial Planning*. 2001, 14: 110–119.
- 21 Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. Sustainable Withdrawal rates from your retirement portfolio. *Financial Counseling and Planning*. 1999, 10(1): 39–47; Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. Withdrawing money from your retirement portfolio without going broke. *Journal of Retirement Planning*. 2001, 4(4): 35–41.
- 22 Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. A comparative analysis of retirement portfolio success rates: simulation versus overlapping periods. *Financial Services Review*. 2003, 16: 115–128.
- 23 Amerikšas, J.; Veresas, R.; Warshawsky, M. J. Making retirement income last a lifetime. *Journal of Financial Planning*. 2001, 14: 60–76.
- 24 Bengen, W. P. Conserving client portfolios during retirement, part III. *Journal of Financial Planning*. 1997, 10(6): 84–97.
- 25 Pye, G. B. Sustainable investment withdrawals. *Journal of Portfolio Management*. 2000, 26: 73–83.

tvarumo tyrimų rezultatus. Kai akcijų dalis portfelyje didelė, 4,5 % išėmimo norma yra tvari 30 metų esant 90 % tikimybei.

G. R. Weissas<sup>26</sup> pristatė dinaminio rebalansavimo idėją valdant portfelį pensijos laikotarpiu. Monte Carlo metodu atskleista, kad portfelio, kurio 50 % sudaro akcijos, kurių vidutinė metinė reali grąža 8 %, 50 % – obligacijos, kurių vidutinė metinė reali grąža 2 %, dinaminis rebalansavimas leidžia taikyti 4,2 % išėmimo normą, esant 10 % poreikvojimo tikimybei, ir 4,8 % išėmimo normą, esant 20 % poreikvojimo tikimybei.

P. P. Vora ir J. D. McGinniso<sup>27</sup> tyrimo rezultatai parodė, kad 100 % akcijų portfelis buvo pranašesnis už 100 % obligacijų portfelį, garantuodamas didesnę vartojimą pensijos laikotarpiu. Tais retais atvejais, kai už 100 % akcijų portfelį buvo naudingesni kiti turto deriniai, buvo ekonomikos nuosmukis. Autoriai taip pat nustatė, kad akcijų portfelio pranašumas prieš obligacijų portfelį didėja ilgėjant investavimo laikotarpiui.

J. J. Spitzeris, J. C. Strieteris ir S. Singhas<sup>28</sup> Bootstrap imitacinio modeliavimo metodu analizavo išėmimo normas, finansinio turto struktūros ir tikimybės, jog portfelio nepakaks pensijos laikotarpiui finansuoti, sąveiką. Jie išplėtė ankstesnius tyrimus, nagrinėdami daug daugiau finansinio turto derinių ir paneigė teiginį, kad 4 % išėmimo norma yra visiškai tvari.

J. J. Spitzeris<sup>29</sup> praplėtė ankstesnį tyrimą Bootstrap imitacinio modeliavimo metodu, iki tol tyrimuose naudotas fiksuotas per visą pensijos laikotarpį išėmimo normas ir portfelio struktūrą pakeisdami kintančiomis kas penkeri metai. Tyrimo rezultatai parodė, kad išėmimo normos arba/ir finansinio turto struktūros keitimas kas penkeri metai ne tik sumažino tikimybę, jog portfelis bus pereikvotas nesulaukus pensijos laikotarpio pabaigos, bet ir leido išimti iš portfelio didesnes sumas.

J. J. Spitzeris, J. C. Strieteris ir S. Singhas<sup>30</sup> Bootstrap imitacinio modeliavimo metodu nagrinėjo „prisitaikančių išėmimų“ iš portfelio strategijų įtaką portfelio, kurį sudaro tik akcijos ir obligacijos, tvarumui pensijos laikotarpiu, ir padarė išvadą, kad ši strategija, kai išimama iš portfelio mažiausiai 4 % pradinio portfelio, kai portfelis auga, ir 3,6 % pradinio portfelio tuo laikotarpiu, kai portfelio vertė mažėja, yra pati palankiausia, palyginti su fiksuotų išėmimų strategijomis, kadangi leidžia išimti iš portfelio didžiausias sumas.

J. T. Guytonas<sup>31</sup> parodė, kaip tam tikrų sprendimo priėmimo taisyklių rinkinys lemia tvarios išėmimo normos dydį. J. T. Guytonas ir W. Klingeris<sup>32</sup> papildė sprendimo

26 Weiss, G. R. Dynamic rebalancing. *Journal of Financial Planning*. 2001, 14(2): 100–106.

27 Vora, P. P.; McGinnis, J. D. The Asset Allocation Decision in Retirement: Lessons from Dollar Cost Averaging. *Financial Services Review*. 2000, 9: 47–63.

28 Spitzer, J. J.; Strieter, J. C.; Singh, S. Guidelines for withdrawal rates and portfolio safety during retirement. *Journal of Financial Planning*. 2007, 20: 52–59.

29 Spitzer, J. J. Retirement withdrawals: an analysis of the benefits of periodic “midcourse” adjustments. *Financial Services Review*. 2008, 17: 17–29.

30 Spitzer, J. J.; Strieter, J. C.; Singh, S. Adaptive withdrawals. *The Journal of Investing*. 2008, 17(2): 104–113.

31 Guyton, J. T. Decision Rules for Portfolio Management for Retirees: Is the ‘Safe’ Initial Withdrawal Rate Too Safe? *Journal of Financial Planning*. 2004, 17(10): 54–61.

32 Guyton, W. T.; Klinger, W. Decision rules and maximum initial withdrawal rates. *Journal of Financial Planning*. 2006, 19(3): 48–59.



priėmimo taisyklės ir rezultatus dar kartą patikrino Monte Carlo imitacinio modeliavimo metodu. Kai akcijų dalis portfelyje sudaro 65 %, 5,2–5,6 % pradinė (pirmaisiais metais) išėmimo norma yra tvari 40 metų laikotarpiu, kai pasiklovimo lygmuo 99 %, ir padidėja iki 5,7–6,2 %, kai pasiklovimo lygmuo lygus 95 %.

Pateikta tyrimo objektui aktualių mokslinių tyrimų apžvalga leidžia daryti išvadą, kad nėra vienos pensijos portfelio sudarymo ir valdymo metodikos, kuri būtų plačiai pripažįstama ir taikoma investicijų valdymo srities mokslininkų ir profesionalų. Reikia pripažinti, kad egzistuoja daug galimų portfelio valdymo strategijų, kurios tėra stiliizuotos į tikslą orientuoto investavimo, analizuoto J. L. P. Brunelo<sup>33</sup> bei A. B. Chhabros, R. Kuneru ir L. Zaharoffo<sup>34</sup>, lockbox strategijos, kurią pasiūlė W. F. Sharpe'as, J. S. Scottas ir J. G. Watsonas<sup>35</sup>, arba C. D. Robinsono<sup>36</sup> išdėstytų tarpniais pajamų požiūrio variantai. Todėl šiame straipsnyje iš esmės bus siekiama išnagrinėti optimalios pensijos portfelio sudėties nustatymo metodus, nustatyti optimalią pensijos portfelio sudėtį ir pateikti rekomendacijas dėl nagrinėjamų metodų taikymo praktikoje.

### 3. Pensijos portfelio sudarymo metodai

Optimalios pensijos portfelio sudėties ir optimalios išėmimų iš portfelio strategijos sudarymas yra sudėtinga užduotis, kuriai įveikti iki šiol aiškios metodologijos nėra. Portfelio sudėties nustatymo sprendimų svarba plačiai nagrinėta mokslinėje literatūroje (W. W. Jahnke<sup>37</sup>, E. J. Elton ir M. J. Gruber<sup>38</sup> ir kt.). Portfelio sudėties sprendimai labiausiai lemia portfelio vertės augimo trajektoriją, todėl šiai problemai skiriama ypač daug dėmesio. Pasiūlyta keletas metodų optimaliai portfelio sudėčiai nustatyti, pradedant nuo 100 iki 145 minus investuotojo amžiaus taisykle, parodančia akcijų dalį portfelyje, ir baigiant stochastiniu optimizavimu, pasiūlytu Y. A. Koskosidiso ir A. M. Duarte<sup>39</sup>, tačiau iki šiol šie metodai beveik nebuvo analizuojami drauge svarstant pensijos portfelio sudarymo klausimus.

Tyrimui pasirinkti trys pensijos portfelio sudarymo metodai, besiskiriantys reikalingų skaičiavimų sudėtingumu.

- 
- 33 Brunel, J. L. P. How sub-optimal – if at all – is goal-based asset allocation? *Journal of Wealth Management*. 2006, 9(2): 19–34.
- 34 Chhabra, A. B.; Kuneru, R.; Zaharoff, L. Creating a goal-based wealth allocation process. *Journal of Wealth Management*. 2008, 11(3): 48–55.
- 35 Sharpe, W. F.; Scott, J. S.; Watson, J. G. Efficient Retirement Financial Strategies. *Recalibrating Retirement Spending and Saving*. Ameriks, J.; Mitchell, O. S. (eds.). Oxford: Oxford University Press, 2008, p. 210.
- 36 Robinson, C. D. A phased income approach to retirement withdrawals: A new paradigm for a more affluent retirement. *Journal of Financial Planning*. 2007, 20(3): 44–57.
- 37 Jahnke, W. W. The Importance of Asset Allocation. *Journal of Investing*. 2000, 9(1): 61–64.
- 38 Elton, E. J.; Gruber, M. J. The Rationality of Asset Allocation Recommendations. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 2000, 35(1): 27–42.
- 39 Koskosidis, Y. A.; Duarte, A. M. A Scenario-Based Approach to Active Asset Allocation. *Journal of Portfolio Management*. 1997, 23(2): 74–85.

### 3.1. Euristinis metodas

Euristiniu metodu šiame straipsnyje vadinamas apytikslis pensijos portfelio sudėties nustatymo metodas, pagal kurį akcijų dalis portfelyje nustatoma remiantis populiariąja „100 minus investuotojo amžius“ taisykle. Tai reiškia, kad, pavyzdžiui, 35 % 65-erių metų asmens portfelio turėtų sudaryti akcijos, o kitą dalį – obligacijos ar kiti mažiau rizikingi aktyvai.

Nors šis požiūris į portfelio sudėties nustatymą turi daug šalininkų, R. G. Ibbotsonas ir bendraautoriai<sup>40</sup> abejoja, ar euristinis metodas gali būti taikomas pensijos kaupimo etape, kai asmuo gauna darbo pajamas. Šiame straipsnyje nagrinėjama portfelio sudėties pensijos laikotarpiu, o tai reiškia, kad žmogiškasis kapitalas neturi įtakos portfelio sudėčiai, todėl keliame hipotezę, kad euristinis metodas gali būti taikomas pensijos laikotarpiu portfelio sudėčiai nustatyti.

Neigiama euristinio metodo ypatybė ta, kad vidutinė obligacijų dalis portfelyje yra pernelyg didelė, o tai gali lemti didesnę nei pageidaujama portfelio pereikvojimo tikimybę bei didesnę galutinę portfelio vertę paveldėtojams.

Dėl šios priežasties atsirado euristinio metodo modifikacijų, kurias vėlgi galima vadinti euristinėmis, apskaičiuotomis apytiksliai. Tarp tokių modifikuotų metodų yra W. P. Bengeno<sup>41</sup> akcijų daliai portfelyje nustatyti taikoma „115 minus investuotojo amžius“ konservatyviam investuotojui, „128 minus investuotojo amžius“ nuosaikiam investuotojui, „140 minus investuotojo amžius“ agresyviai investuotojui, G. Smitho ir D. P. Gouldo<sup>42</sup> obligacijų dalies portfelyje nustatymo taisyklė „investuotojo amžius minus 25“ arba „investuotojo amžius minus 35“ strategija, S. R. Leimbergo ir bendraautorių<sup>43</sup> akcijų daliai nustatyti taikoma „110 minus investuotojo amžius“ taisyklė ir kt.

### 3.2. Daugelio horizontų metodas

D. M. Cordello<sup>44</sup> pasiūlytas daugelio horizontų metodas pensijos portfelio sudėčiai nustatyti paremtas prielaida, kad asmuo valdo portfelį, susidedantį iš keleto ar keliasdešimties portfelių, o jų investicijų laikotarpis skirtingas. Įsivaizduokime asmenį, kuris išėjęs į pensiją planuoja iš sukaupto portfelio kasmet išimti tam tikras sumas vartojimui. Kasmet asmuo vieneriais metais priartėja prie išimamos sumos. Išėjęs į pensiją asmuo išgrynina pirmąjį portfelį. Savaimė suprantama, kad portfelį, kuris bus išgrynintas po vienerių metų, turėtų sudaryti konservatyvūs aktyvai. Tačiau tie portfeliai, kurių laikotarpis daugiau nei 20 metų, turėtų būti investuojami gerokai rizikingiau. Net ir portfelio, kurio investicijų laikotarpis 10 metų, didžiąją dalį turėtų sudaryti akcijos. Kiekviena

40 Ibbotson, R. G., et al. *Lifetime Financial Advice: Human Capital, Asset Allocation, and Insurance*. The Research Foundation of CFA Institute, 2007, p. 15.

41 Bengen, W. P. Asset allocation for a lifetime. *Journal of Financial Planning*. 1996, 9(4): 58–67.

42 Smith, G.; Gould, D. P. Measuring and Controlling Shortfall risk in retirement. *The Journal of Investing*. 2007, 16(1): 82–95.

43 Leimberg, S. R., et al. *Tools and Techniques of Retirement Income Planning*. First Edition. The National Underwriter Company, 2007.

44 Cordell, D. M. A multiple-horizon approach to asset allocation in retirement portfolio. *Journal of Financial Planning*. 2005, 8(5): 34–39.

kasmet iš portfelio išimama suma traktuojama kaip atskiras portfelis, kurio investicijų laikotarpis individualus, todėl atsižvelgiant į asmens rizikos toleranciją kiekvieno portfelio sudėtis nustatoma atskirai. Pensijos portfelio, kaip skirtingos trukmės portfelių visumos, sudėtis nustatoma remiantis pinigų laiko vertės koncepcija.

Šis gana nesudėtingas, lankstus ir lengvai taikomas metodas, autoriaus nuomone, turi ir trūkumą – nustatyta portfelio sudėtis tam tikrais atvejais gali būti pernelyg konservatyvi. Pavyzdžiui, jei asmuo turi didesnę santaupų sumą, nei reikalaujama pagal metodą, tuomet jis galėtų ryžtis rizikingesnėms investicijoms ir taip palikti paveldėtojams didesnę sumą. Tokių asmenų tikėtina gyvenimo trukmė neatspindi tikrojo investicijų laikotarpio.

### 3.3. Stochastinis optimizavimas

Stochastinis optimizavimas nusako tikslo funkcijos su stochastinės prigimties kintamaisiais optimizavimą. Didėjant Monte Carlo imitacinio modeliavimo poreikiui, vis dažniau imitacinio modeliavimo programinių priemonių gamintojai į jas įtraukia stochastinio optimizavimo procedūros galimybę. Stochastinio optimizavimo metu taikant imitacinio modeliavimo programinį paketą modelio skaičiavimo rezultatai (išvestis) panaudojami kaip įvestis optimizavimo algoritmui.

Stochastinio optimizavimo procedūra labai dažnai taikoma fizikos ir gamtos moksluose, tačiau optimaliam pensijos portfeliui sudaryti ir išėmimų strategijai planuoti ši procedūra dar menkai taikyta. Vienintelis bandymas stochastiškai optimizuoti pensijos portfelį priklauso R. G. Stoutui<sup>45</sup>.

## 4. Tvaraus pensijos portfelio sudarymas pastoviam planuojamam pensijos laikotarpiui

### 4.1. Tyrimo metodika

Tarkime, asmuo netrukus išeis į pensiją ir turi sukaupęs tam tikrą pinigų sumą. Kasmet asmuo išima iš portfelio pastovią procentinę pradinio portfelio vertės dalį vartojimui, tad pensijos laikotarpį asmuo pradeda išimdamas iš portfelio tam tikrą sumą, o likutį investuoja į akcijas ir vidutinės trukmės vyriausybės obligacijas tam tikru santykiu, kurį nustato trimis skirtingais (euristiniu, daugelio horizontų bei stochastinio optimizavimo) metodais. Akcijų ir obligacijų graža modelyje – stochastiniai dydžiai. Asmuo siekia, kad portfelio pakaktų planuojamam pensijos laikotarpiui. Tad šio tyrimo tikslas yra taikant anksčiau minėtus metodus nustatyti optimalią finansinio turto struktūrą, kuri užtikrintų, kad tikimybė, jog portfelio vertė taps lygi nuliui (toliau – pereikvojimo tikimybė), būtų minimali, ir palyginti skirtingais metodais gautus rezultatus.

---

45 Stout, R. G. Stochastic optimization of retirement portfolio asset allocations and withdrawals. *Financial Services Review*. 2008, 17(1): 1–15.

Analizuojami keli skirtingi scenarijai amžiaus ir išimamos iš portfelio sumos aspektais. Asmuo išeina į pensiją būdamas 55, 60, 65, 70 metų, todėl skaičiuojant taikomas planuojamas pensijos laikotarpis ir papildomas penkerių metų apsaugos laikotarpis atitinkamai 35, 30, 25, 20 metų. Visais atvejais asmuo tikisi gyventi iki 85 metų. Siekiant papildomai apsidrausti pridėdama po penkerius papildomus metus, todėl visais atvejais asmuo planuoja pajamas iki 90 metų. Tiriant metodus nagrinėjamos 3,0 %, 3,5 %, 4,0 %, 4,5 %, 5,0 %, 5,5 %, 6,0 %, 6,5 %, 7,0 %, 7,5 %, 8,0 %, 8,5 %, 9,0 %, 9,5 %, 10,0 % išėmimo normos. Kasmet iš portfelio išimama suma laikoma pakoreguota atsižvelgiant į infliaciją, kadangi modelyje naudojamos realios turto klasių gražos. Išėmimo norma yra fiksuota ir nekinta per nagrinėjamą pensijos laikotarpį. Portfelis visais atvejais rebalansuojamas kasmet. Mokesčiai bei operacijų sąnaudos modelyje neįvertinti.

Anksčiau minėtiems trimis metodams tirti pasitelkiama dinaminio Monte Carlo imitacinio modeliavimo technika (GoldSim v. 10.10 programinis paketas), kuria skaičiuojama tikimybė, kad portfelio vertė pensijos laikotarpiu taps lygi nuliui, kitaip tariant, portfelis bus pereikvotas anksčiau negu planuota (toliau – pereikvojimo tikimybė). Kiekvienos simuliacijos metu modelis generuoja 20 000 realizacijų ir vieną portfelio pereikvojimo tikimybę (realizacijų, kai portfelio vertė tampa lygi 0, skaičius padalytas iš bendro realizacijų skaičiaus).

Priešingai nei statinio imitacinio modeliavimo atveju, dinaminis imitacinis modelis kinta laikui bėgant. Dinaminis imitacinis modeliavimas padeda suprasti, kaip tam tikra sistema kinta laike, prognozuoti sistemos elgseną laikui bėgant bei tikėtinus ateities rezultatus, parinkti priemones, veikiančias sistemos elgsenos pokyčius pageidaujama linkme.

Nagrinėjamą hipotetinį portfelį sudaro dvi turto klasės: akcijos ir vidutinės trukmės JAV vyriausybės obligacijos. Šių turto klasių metinės realios gražos atsitiktinai generuojamos modeliu. Modeliui sudaryti pasirinktos realios gražos siekiant sumažinti skaičiavimų sudėtingumą bei išvengti infliacijos modeliavimo. Modelio parametrus nustatyti analizuojami 1926–2009 m. istoriniai akcijų ir vidutinės trukmės JAV vyriausybės obligacijų gražų duomenys.

Daug mokslininkų, pavyzdžiui, D. M. Blanchettas ir L. R. Frankas<sup>46</sup>, J. J. Spitzeris, J. C. Strieteris ir S. Singhas<sup>47</sup>, J. J. Spitzeris ir S. Singhas<sup>48</sup>, tyrimuose taiko bootstrap imitacinio modeliavimo metodą, kai gražos atsitiktinai generuojamos iš istorinių mėtinių arba mėnesinių gražų. Tokiu atveju daroma prielaida, kad tos pačios 30, 60 ar 100 metų laikotarpio istorinės metinės ar mėnesinės gražos kartosis ateityje, tačiau kita seka. Atsitiktinai imamas tam tikrų metų portfelį sudarančių turto klasių gražų rinkinys, taip išlaikant koreliaciją tarp turto klasių gražų. Nors, H. Schleefo ir R. M. Eisingerio<sup>49</sup>

46 Blanchett, D. M.; Frank, L. R. A dynamic and adaptive approach to distribution planning and monitoring. *Journal of Financial Planning*. 2009, 22: 52–66.

47 Spitzer, J. J.; Strieter, J. C.; Singh, S. Adaptive withdrawals. *The Journal of Investing*. 2008, 17(2): 104–113.

48 Spitzer, J. J., Singh, S. Is rebalancing a portfolio during retirement necessary? *Journal of Financial Planning*. 2007, 20: 46–57.

49 Schlee, H.; Eisinger, R. M. Hitting or missing the retirement target: Comparing contribution and asset allocation schemes of simulated portfolios. *Financial Services Review*. 2007, 16: 229–243.

nuomone, modeliuojant šiuo metodu nereikia daryti prielaidų dėl turto klasių gražų pasiskirstymo (normaliojo ar lognormaliojo), didžiausias šio metodo trūkumas yra tas, kad pasiskirstymo funkcija yra apribota istorinių gražų, tačiau situacija rinkoje gali pasikeisti staiga ir nebūtinai kartotis.

Šis tyrimas remiasi Monte Carlo imitacinio modeliavimo technika. Toks modelis leidžia imituoti ekstremalesnius negu istoriniai akcijų bei obligacijų rinkos svyravimus. B. J. McCabe'as ir Ch. P. Boinske<sup>50</sup> teigia, kad geresnė bootstrap metodo alternatyva yra daryti prielaidą, kad kaupimo daugikliai yra pasiskirstę pagal lognormalųjį pasiskirstymą, o šio pasiskirstymo parametrus (vidurkį ir standartinį nuokrypį) kiekviena turto klasei atskirai nustatyti iš istorinių duomenų ir skaičiuojant svertinį vidurkį nustatyti viso portfelio gražą ir kintamumą.

Sudarant modelį daroma prielaida, kad turto klasių vienerių metų kaupimo daugikliai (1 plus metinė reali graža) (toliau – kaupimo daugikliai) pasiskirstę lognormaliai. Lognormalumo prielaida buvo patikrinta skaičiuojant istorines logaritmines gražas bei Kolmogorovo-Smirnovo testu tikrinant, ar minėtų gražų skirstiniai skiriasi nuo normalaus pasiskirstymo. Lognormalių atsitiktinių dydžių generavimas gali būti paremtas normaliai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių generavimu bei lognormalių ir normalių skirstinių sąryšiu. Paprasčiausia sugeneruoti lognormaliai pasiskirsčiusį atsitiktinį dydį  $Y$  yra generuoti normaliai pasiskirsčiusį atsitiktinį dydį  $X$  ir tuomet skaičiuoti  $Y=e^x$ .

Į modelį įtrauktų atsitiktinių dydžių atsitiktiniai pasiskirstymai buvo modeliuoti LHS (Latin Hypercube Sampling) metodu, kuris dažnai taikomas siekiant sumažinti realizacijų skaičių, kuris reikalingas, kad būtų pakankamai tiksliai atspindėtas atsitiktinio dydžio pasiskirstymas. Taikant šį metodą atsitiktinio dydžio tikimybės pasiskirstymas yra suskaidomas į  $N$  atkarpų arba sluoksnių (angl. *strata*) ( $N$  – realizacijų skaičius; tyrimo atveju – 20 000), tuomet jos sumaišomos, o atsitiktinis dydis parenkamas iš eilės iš kiekvienos atkarpos, tačiau atsitiktinai pačios atkarpos viduje. LHS metodas užtikrina, kad kiekviena atsitiktinio dydžio reikšmė generuojant atsitiktinius dydžius būtų atspindėta.

Imitaciniu modeliu generuojant atsitiktinius dydžius taip pat išlaikyta istorinė koreliacija tarp akcijų ir vidutinės trukmės JAV vyriausybės obligacijų, lygi 0,16. Neparametriniu Kolmogorovo-Smirnovo  $Z$  testu patvirtinta nulinė hipotezė, kad imitacinio modelio turto klasių gražų skirstiniai statistiškai reikšmingai nesiskiria nuo istorinių gražų pasiskirstymo. Remiantis testo rezultatais daroma prielaida, kad remiantis istoriniais duomenimis nustatyti akcijų ir obligacijų kaupimo daugiklių skirstinių parametrai tinkamai apibūdina galimas ateities turto klasių gražų trajektorijas.

Kiekvienų metų pradžioje asmuo išima iš portfelio tam tikrą sumą, o likutį iki kito išėmimo investuoja tam tikru santykiu į akcijas ir vidutinės trukmės vyriausybės obligacijas ir gauna realią gražą priklausomai tuo turto klasių santykio portfelyje. Imitacinis modelis turi vieną būsenos kintamąjį – „LYGUS 0“, bet kuriuo laikotarpiu  $t$  tikrinantį, ar portfelio vertė netampa lygi nuliui, ir galintį įgyti reikšmes tik „teisinga“ arba „klaid-

50 McCabe, B. J.; Boinske, Ch. P. Wealth Planning Under Uncertainty. *Journal of Financial Planning*. 2000, 13(3): 84–96.

inga“ (modelyje neleidžiama portfelio vertei tapti neigiama). Išimti iš portfelio lėšų įmanoma tik tada, kai būsenos kintamojo reikšmė yra „klaidinga“, o pensijos laikotarpis dar nėra pasibaigęs.

Akcijų ir obligacijų dalys portfelyje, apskaičiuotos pagal euristinį ir daugelio horizontų metodus, vėliau testuojamos dinaminio stochastiniu imitaciniu modeliu su stochastine turto klasių graža. Stochastinio optimizavimo metodu turto klasių santykis nustatomas vien taikant dinaminį stochastinį imitacinį modelį.

Stochastinio optimizavimo metu taikomas Box metodas. Metodo esmė ta, kad pirmiausia yra parenkamas tam tikras sprendinių, tenkinančių visus vartotojo reikalavimus, komplektas, sudarytas iš dvigubai daugiau sprendinių nei yra optimizuojamų kintamųjų. Kai tik nustatomas pradinis sprendinių rinkinys, algoritmas sprendinių apribotame paieškos lauke atlieka skaičiavimus kiekvieną kartą keisdamas labiausiai netinkamus komplekto narius į tinkamesnius, kol surandamas tinkamiausias sprendinys.

Stochastiniu optimizavimu siekiama rasti tokią optimalią portfelio, sudaryto iš dviejų aktyvų, sudėtį, kuriai esant tikimybė, kad portfelis bus pereikvotas anksčiau nei numatytas pensijos laikotarpis, būtų minimali.

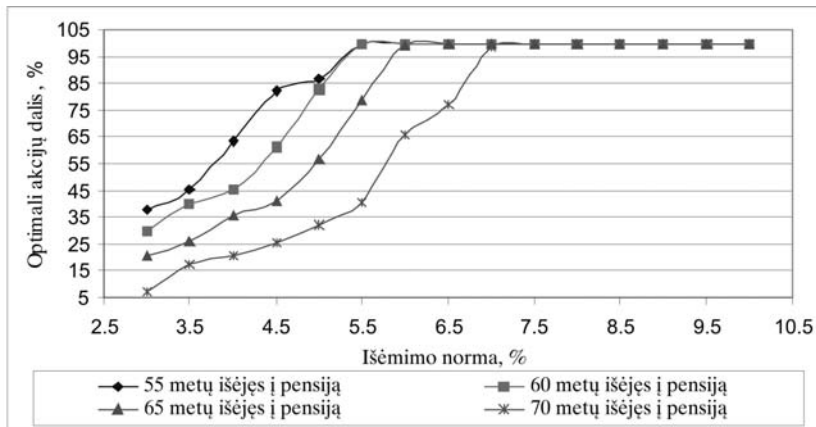
Siekiant šio tikslo sudarytas imitacinis modelis, jungiantis statinio optimizavimo ir dinaminio stochastinio imitacinio modeliavimo galimybes. Šiuo atveju statinio optimizavimo procedūroje naudojamas modelis apima kitą – dinaminį stochastinį imitacinį modelį (submodelį). Taip yra todėl, kad optimizuojama tikslo funkcija privalo būti statinė, o stochastinio modelio rezultatai visada būna išreikšti tam tikrais tikimybės skirstiniais. Kitaip tariant, jei  $X$  yra stochastinio modelio rezultatas (visais atvejais tai tikimybės skirstinys),  $X$  optimizavimas būtų bevaisis. Tikslinga optimizuoti tam tikrą statistiką, pavyzdžiui,  $X$  vidurkį. Tam tikslui sudaromas modelis modelyje, t. y. dinaminis Monte Carlo imitacinis modelis statiniame optimizavimo modelyje. Dinaminio stochastinio imitacinio modelio rezultatas – vidutinė tikimybė, kad portfelio vertė bus lygi nuliui, bei tikimybė, kad portfelio vertė netaps lygi nuliui (abiejų tikimybių suma visada lygi 1). Tikimybė, kad portfelio vertė taps lygi nuliui, priklauso nuo išėmimo normos, portfelio sudėties, asmens amžiaus pensijos laikotarpio pradžioje (pensijos laikotarpio trukmės) bei stochastinių akcijų ir obligacijų gražų. Optimizuojant siekiama minimizuoti tikimybę, kad portfelio vertė taps lygi nuliui esant tam tikrai išėmimo normai, asmens amžiui pensijos pradžioje (pensijos laikotarpio trukmės) bei stochastinėms turto klasių gražoms. Optimizuojamas kintamasis – akcijų dalis portfelyje.

Gautos optimalios akcijų dalys esant įvairioms išėmimo normoms ir pensijos laikotarpio trukmėms toliau testuojamos tam tikslui parengtu dinaminio stochastiniu imitaciniu modeliu, taip gaunant vidutinės portfelio pereikvojimo tikimybės ir jos standartinio nuokrypio bei vidutinio galutinės ir pradinės pensijos portfelio vertės santykio bei jo standartinio nuokrypio statistikas. Minėtos statistikos nustatomos skirtingoms išėmimo normoms ir pensijos laikotarpio trukmėms atskirai. Kiekvienu atveju skaičiuojama 20 000 realizacijų.

## 4.2. Tyrimo rezultatai

Stochastiškai optimizuojant imitacinį modelį, detaliau apibūdintą 4.1. skyriuje, nustatyta optimali akcijų dalis portfelyje numačius tam tikrą išėmimo normą ir planuojamą pensijos laikotarpį, kai žinomas asmens amžius pensijos laikotarpio pradžioje.

Kaip matyti iš 1 paveiksle pateiktų stochastinio optimizavimo rezultatų, trumpėjant planuojamam pensijos laikotarpiui, optimali akcijų dalis portfelyje mažėja, tačiau didėjant išėmimo normai optimali akcijų dalis portfelyje smarkiai didėja, o taikant 7,5 % ir didesnę išėmimo normą esant bet kokiai analizuojamai planuojamo pensijos laikotarpio trukmei portfeli turėtų sudaryti vien akcijos.



1 pav. Optimali akcijų dalis pastoviam pensijos laikotarpiui

Stochastinio optimizavimo būdu nustatyta akcijų dalis portfelyje išimant iš portfelio daugiau nei 3,5 % pradinio portfelio vertės kasmet į pensiją išėjusiam 60-ties metų asmeniui yra visuomet didesnė nei euristiniu metodu nustatyta akcijų dalis, o išimant daugiau nei 4,5 % – visuomet didesnė ir už daugelio horizontų metodu nustatytą akcijų dalį portfelyje.

Daugelio horizontų metodu nustatyta akcijų dalis kasmet mažėja, tačiau pirmąją pensijos laikotarpio dalį yra aukštesnė nei euristiniu metodu nustatytoji, antrąją pensijos laikotarpio dalį – mažesnė, o paskutinius šešerius pensijos laikotarpio metus lygi nuliui, palyginti su euristiniu metodu, kurį taikant paskutiniais pensijos laikotarpio metais akcijų dalis lygi 11 %. Didesnė optimali akcijų dalis, palyginti su kitais metodais nustatyta akcijų dalimi portfelyje, pensijos laikotarpiu lemia mažesnę portfelio pereikvojimo tikimybę.

Taikant dinaminį stochastinį imitacinį modelį nustatytos portfelio pereikvojimo tikimybės nustačius tam tikrą išėmimo normą ir asmens amžių pensijos laikotarpio pradžioje, darant prielaidą, kad asmuo tikisi gyventi iki 90-ties metų. Tokiu atveju pereikvojimo tikimybė arba tikimybė, kad portfelio vertė taps lygi nuliui, priklauso nuo išėmimo normos, portfelio sudėties, asmens amžiaus pensijos laikotarpio pradžioje (pen-

sijos laikotarpio trukmės) bei stochastinių akcijų ir obligacijų gražų. Kartu nustatytas ir poreikvojimo tikimybės standartinis nuokrypis, vidutinis galutinės (pensijos laikotarpio pabaigoje) ir pradinės portfelio vertės santykis bei šio santykio standartinis nuokrypis.

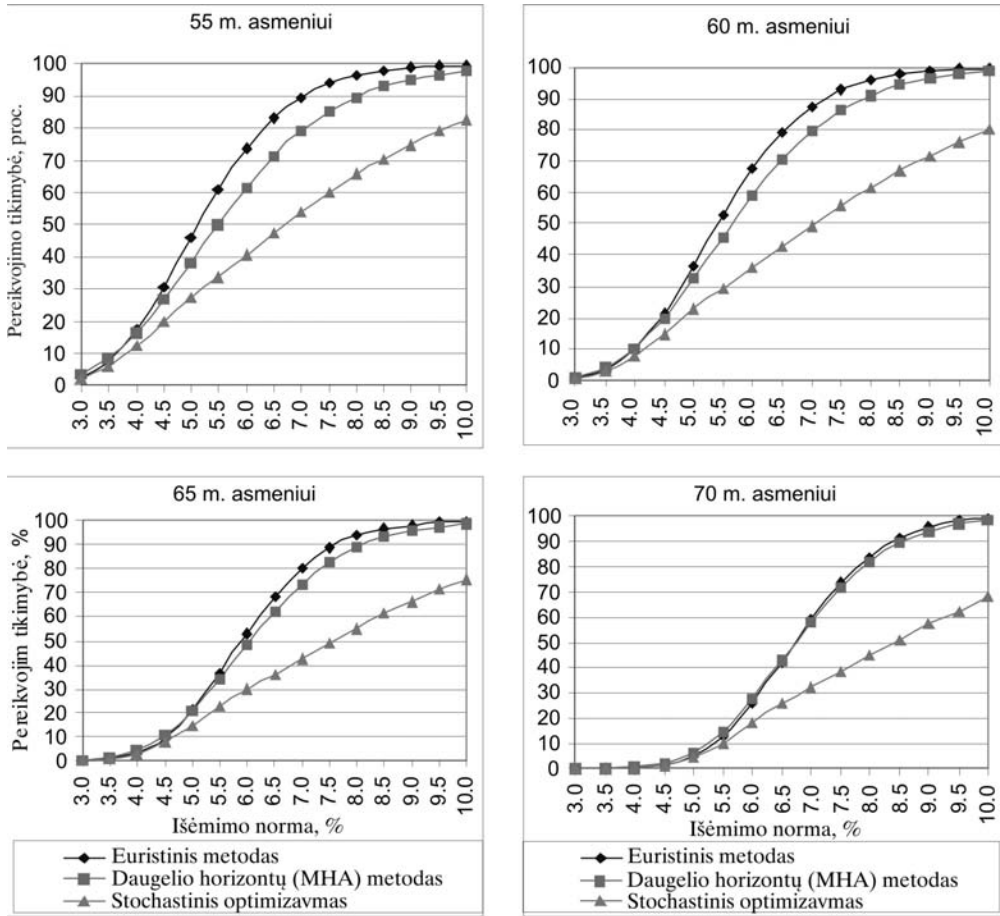
Portfelio poreikvojimo tikimybė taikant skirtingus metodus portfelio sudėčiai nustatyti grafiškai pateikta 1 paveiksle. Asmuo, sudarydamas portfelį, siekia, kad jo pakaktų planuojamam pensijos laikotarpiui, dėl to pagrindinis metodo efektyvumo kriterijus yra mažiausia portfelio poreikvojimo tikimybė kaip portfelio rizikos pensijos laikotarpiu matas. Kiekvienas iš keturių grafikų vaizduoja asmenų, išeinančių į pensiją skirtingo amžiaus ir taikančių skirtingus portfelio sudarymo metodus, portfelio poreikvojimo tikimybes.

Akivaizdu, kad stochastinio optimizavimo būdu gautas optimalus dviejų aktyvų portfelis užtikrina visais atvejais mažiausią portfelio poreikvojimo tikimybę, palyginti su euristiniu ir daugelio horizontų metodais sudarytais portfeliais. Pavyzdžiui, tikimybė, kad asmens, išėjusio į pensiją 65-erių metų, portfelio vertė per ateinančius 25-erius metus taps lygi nuliui, yra vidutiniškai 20,9 procentinio punkto (arba 58,5 %) didesnė taikant euristinį metodą, palyginti su stochastinio optimizavimo būdu sudarytu portfeliu, bei 18,5 procentinio punkto (arba 51,7 %) didesnė sudarant portfelį daugelio horizontų metodu.

Analizuojant vien euristinį ir daugelio horizontų metodus galima pastebėti, kad daugelio horizontų metodu nustatant akcijų ir obligacijų santykį portfelyje numatant didesnes išėmimo normas, tikimybė poreikvoti portfelį yra mažesnė, t. y. daugelio horizontų metodu sudaryti portfeliai, kai išėmimo normos didesnės, yra panašesni į stochastinio optimizavimo metodu gautus portfelius. Neturint techninių galimybių stochastiškai optimizuoti, 55-erių metų asmuo, taikantis 4,0 % ir didesnę išėmimo normą, 60-ties metų asmuo, taikantis 4,5 % ir didesnę išėmimo normą, 65-erių metų asmuo, taikantis 5,0 % ir didesnę išėmimo normą, bei 70-ties metų asmuo, taikantis 7,0 % ir didesnę išėmimo normą, turėtų portfelį sudaryti daugelio horizontų metodu, nes šis užtikrina mažesnę portfelio poreikvojimo tikimybę.

Analizuojant detaliau portfelio poreikvojimo tikimybes, kai numatoma mažesnė nei 4,5 % išėmimo norma, galima pastebėti, kad euristinis metodas šiuo atveju šiek tiek panašesnis už daugelio horizontų metodą pensijos laikotarpiu. Turint galvoje, kad daugelio horizontų metodas reikalauja kiek daugiau skaičiavimų nei euristinis metodas, kai didesnės išėmimo normos ir ilgesni nei 20-ties metų pensijos planavimo laikotarpiai, racionaliau būtų taikyti daugelio horizontų metodą, jei nėra stochastinio optimizavimo galimybių. 20-ties metų laikotarpiu euristiniu metodu sudaryto portfelio poreikvojimo tikimybė vidutiniškai tik 0,3 procentinio punkto didesnė nei daugelio horizontų metodu sudaryto portfelio, dėl to šiuo atveju rekomenduojama pasirinkti euristinį metodą (jei neturima stochastinio optimizavimo galimybių).





2 pav. Portfelio pereikvojimo tikimybė pagal taikomą metodą ir asmens amžių pensijos laikotarpio pradžioje

## Išvados

1. Taikant dinaminį stochastinį imitacinį modeliavimą ir stochastinį optimizavimą atlikta pensijos portfelio sudarymo metodų analizė parodė, kad optimali akcijų dalis išimant iš portfelio daugiau nei 5,5 % pradinės portfelio vertės per metus visais analizuojamais laikotarpiais yra didesnė nei nustatytoji euristiciniu arba daugelio horizontų metodais.

2. Stochastinio optimizavimo metodu sudaryto portfelio pereikvojimo tikimybė visais analizuojamais atvejais mažesnė nei portfelį sudarant euristiciniu ar daugelio horizontų metodais.

3. Nesant stochastinio optimizavimo galimybės, sudarant portfelį ilgesniam nei 20-ties metų pensijos laikotarpiui ir siekiant išimti iš jo kasmet daugiau nei 4,5 % portfelio pradinės vertės, rekomenduojama portfelio sudėtį nustatyti daugelio horizontų metu. Visais kitais atvejais tiks euristinis metodas.

4. Šiame tyrime planuojamas pensijos laikotarpis buvo pastovus, tačiau realybėje tikslią žmogaus gyvenimo trukmę nusakyti neįmanoma, šiuo atveju nebent kaip orientyru galima remtis gyventojų mirtingumo statistika. Siekiant kuo realesnių ir tikslesnių tyrimo rezultatų tyrimuose turėtų būti įvertinama stochastinė asmens gyvenimo trukmės prigimtis.

## Literatūra

- Abuizam, R. A Risk-Based Model For Retirement Planning. *Journal of Business & Economics Research*. 2009, 7(6).
- Ameriks, J.; Veres, R.; Warshawsky, M. J. Making retirement income last a lifetime. *Journal of Financial Planning*. 2001, 14.
- Benartzi, S.; Thaler, R. H. Naive diversification strategies in defined contribution savings plans. *The American Economic Review*. 2001, 91.
- Bengen, W. P. Asset allocation for a lifetime. *Journal of Financial Planning*. 1996, 9(4).
- Bengen, W. P. Conserving client portfolios during retirement, part IV. *Journal of Financial Planning*. 2001, 14.
- Bengen, W. P. Conserving client portfolios during retirement, part III. *Journal of Financial Planning*. 1997, 10(6).
- Bengen, W. P. Determining withdrawal rates using historical data. *Journal of Financial Planning*. 1994, 7(4).
- Bhandari, G.; Deaves, R. Misinformed and informed asset allocation decisions of self-directed retirement plan members. *Journal of Economic Psychology*. 2008, 29.
- Binswanger, J.; Carman, K. G. *How Real People Make Long-Term Decisions: The Case of Retirement Preparation* [interaktyvus]. CentER Discussion Paper Series No. 2009-73, September 9, 2009 [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1474262](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1474262)>.
- Blanchett, D. M.; Frank, L. R. A dynamic and adaptive approach to distribution planning and monitoring. *Journal of Financial Planning*. 2009, 22.
- Brunel, J. L. P. How sub-optimal – if at all – is goal-based asset allocation? *Journal of Wealth Management*. 2006, 9(2).
- Chhabra, A. B.; Kuneru, R.; Zaharoff, L. Creating a goal-based wealth allocation process. *Journal of Wealth Management*. 2008, 11(3).
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. A comparative analysis of retirement portfolio success rates: simulation versus overlapping periods. *Financial Services Review*. 2003, 16.
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. Sustainable Withdrawal rates from your retirement portfolio. *Financial Counseling and Planning*. 1999, 10(1).
- Cooley, P. L.; Hubbard, C. M.; Walz, D. T. Withdrawing money from your retirement portfolio without going broke. *Journal of Retirement Planning*. 2001, 4(4).
- Cordell, D. M. A multiple-horizon approach to asset allocation in retirement portfolio. *Journal of Financial Planning*. 2005, 8(5).
- Dominitz, J.; Hung, A. *Retirement Savings Portfolio Management* [interaktyvus]. Michigan Retirement Research Center Research Paper No. WP 2006-138, November 2006 [žiūrėta

- 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1095290](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1095290)>.
- Dus, I.; Maurer, R.; Mitchell, O. S. Betting on Death and Capital Markets in Retirement: A Shortfall Risk Analysis of Life Annuities versus Phased Withdrawal Plans. *Financial Services Review*. 2005, 14.
- Elton, E. J.; Gruber, M. J. The Rationality of Asset Allocation Recommendations. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 2000, 35(1).
- Guyton, J. T. Decision Rules for Portfolio Management for Retirees: Is the 'Safe' Initial Withdrawal Rate Too Safe? *Journal of Financial Planning*. 2004, 17(10).
- Guyton, W. T.; Klinger, W. Decision rules and maximum initial withdrawal rates. *Journal of Financial Planning*. 2006, 19(3).
- Huberman, G.; Jiang, W. *The 1/N heuristic in 401(k) plans* [interaktyvus]. EFA 2004 Mastriicht Meetings Paper No. 2036, 2004. [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=556117](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=556117)>.
- Ibbotson, R. G., et al. *Lifetime Financial Advice: Human Capital, Asset Allocation, and Insurance*. The Research Foundation of CFA Institute, 2007.
- Iyengar, S. S.; Jiang, W. *The Psychological Costs of Ever Increasing Choice: A Fallback to the Sure Bet* [interaktyvus]. Columbia University Working Paper, 2005. [žiūrėta 2010-05-24]. <<http://www.reish.com/publications/pdf/psychcosts.pdf>>.
- Jahnke, W. W. The Importance of Asset Allocation. *Journal of Investing*. 2000, 9(1).
- Klement, J. *Life is non-linear: Structuring retirement portfolios for the long haul* [interaktyvus]. UBS Wealth Management Research, Paper presented at the 23rd annual meeting of the Academy of Financial Services in Anaheim, CA, October 9-10, 2009 [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1480124](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1480124)>.
- Koskosidis, Y. A.; Duarte, A. M. A Scenario-Based Approach to Active Asset Allocation. *Journal of Portfolio Management*. 1997, 23(2).
- Leimberg, S. R., et al. *Tools and Techniques of Retirement Income Planning*. First Edition. The National Underwriter Company, 2007.
- McCabe, B. J.; Boinske, Ch. P. Wealth Planning Under Uncertainty. *Journal of Financial Planning*. 2000, 13(3).
- Pye, G. B. Sustainable investment withdrawals. *Journal of Portfolio Management*. 2000, 26.
- Robinson, C. D. A phased income approach to retirement withdrawals: A new paradigm for a more affluent retirement. *Journal of Financial Planning*. 2007, 20(3).
- Schleef, H.; Eisinger, R. M. Hitting or missing the retirement target: Comparing contribution and asset allocation schemes of simulated portfolios. *Financial Services Review*. 2007, 16.
- Sharpe, W. F.; Scott, J. S.; Watson, J. G. Efficient Retirement Financial Strategies. In *Recalibrating Retirement Spending and Saving*. Ameriks, J.; Mitchell, O. S. (eds.). Oxford: Oxford University Press, 2008.
- Smith, G.; Gould, D. P. Measuring and Controlling Shortfall risk in retirement. *The Journal of Investing*. 2007, 16(1).
- Sotto, M., et al. *An Assessment of Life-Cycle Funds* [interaktyvus]. Center for Retirement Research at Boston College Working Paper No. 2008-10, May 2008. [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1156354](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1156354)>.
- Spitzer, J. J.; Singh, S. Is rebalancing a portfolio during retirement necessary? *Journal of Financial Planning*. 2007, 20.
- Spitzer, J. J. Retirement withdrawals: an analysis of the benefits of periodic "midcourse" adjustments. *Financial Services Review*. 2008, 17.
- Spitzer, J. J.; Strieter, J. C.; Singh, S. Adaptive withdrawals. *The Journal of Investing*. 2008, 17(2).
- Spitzer, J. J.; Strieter, J. C.; Singh, S. Guidelines for withdrawal rates and portfolio safety during retirement. *Journal of Financial Planning*. 2007, 20.
- Stout, R. G. Stochastic optimization of retirement portfolio asset allocations and with-

- drawals. *Financial Services Review*. 2008, 17(1).
- Thaler, R. H.; Benartzi, S. *The behavioral economics of retirement savings behavior*. AARP Public Policy Institute, University of Chicago, The Anderson School at UCLA, January 31, 2007.
- Viceira, L. M. *Life-Cycle funds* [interaktyvus]. Harvard Business School, Centre for Economic Policy Research, National Bureau of Economic Research, May 22, 2007. [žiūrėta 2010-05-24]. <[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=988362](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=988362)>.
- Visco, I. *Retirement savings and the payout phase: how to get there and how to get the most out of it* [interaktyvus]. Banca d'Italia. Speech at the OECD conference „The payout phase of pensions, annuities and financial markets“, Paris, 12 November 2008 [žiūrėta 2010-05-24]. <<http://www.oecd.org/dataoecd/55/51/41668605.pdf>>.
- Vora, P. P.; McGinnis, J. D. The Asset Allocation Decision in Retirement: Lessons from Dollar Cost Averaging. *Financial Services Review*. 2000, 9.
- Weiss, G. R. Dynamic rebalancing. *Journal of Financial Planning*. 2001, 14(2).

## DETERMINATION OF ASSET ALLOCATION FOR A SUSTAINABLE RETIREMENT PORTFOLIO USING A DYNAMIC STOCHASTIC SIMULATION

Aušra Klimavičienė

Vilnius Gediminas Technical University, Lithuania

**Summary.** *Due to the instability of world economy, increased longevity, higher health-care and long-term care costs, an adequate retirement income level is a daunting challenge today. A sharp drop in equity markets in 2008 has reduced both private savings and pension fund assets. Today's retirees have to make increasingly complex financial decisions. Gone are the days when one could rely solely on the social security system. The increasing topicality of sophisticated retirement planning is obvious, as retirees will soon be expected to fund larger portions of their retirement spending. The questions of retirement portfolio management will gain focal attention. While various measures can be undertaken to accommodate the individual needs, goals and wishes of today's retirees, the article focuses on how smart portfolio construction can extend the longevity of retirement savings and even enhance the returns.*

*The article reviews the results of former pieces of research in the field of retirement portfolio formation and discusses several methods to determine asset allocation for a retirement portfolio, including the heuristic and the multiple horizon approach and stochastic optimization methods. In this paper, dynamic stochastic simulation and stochastic optimization techniques in Monte Carlo simulation models created by the author are applied to identify the optimal portfolio allocations for minimizing the probabilities of depleting the retirement portfolio earlier than the planned retirement horizon (often termed portfolio ruin or shortfall risk) by making constant inflation-adjusted withdrawals.*

*The analysis of the methods to determine asset allocation for a retirement portfolio showed that an optimal portion of stocks with 5.5 per cent and higher withdrawal rate is always*

higher than that determined using the heuristic or the multiple horizon approach. Stochastic optimization in all cases provided the least risky portfolios in terms of shortfall risk. In case the stochastic optimization is unavailable, the research results suggest applying the multiple horizon approach for portfolios with a longer than 20-years investment horizon and a higher than 4.5 per cent withdrawal rating. Otherwise, the heuristic method should be applied.

In this research, it was supposed that the retirement planning horizon was fixed. In reality it is impossible to predict the exact lifespan of a person; therefore, the stochastic models should incorporate the consideration of stochastic lifetimes as well.

**Keywords:** *sustainable retirement portfolio, methods to determine asset allocation of retirement portfolio, stochastic optimization, probability of retirement portfolio ruin.*

---

**Aušra Klimavičienė**, Vilniaus Gedimino technikos universiteto Verslo vadybos fakulteto Finansų inžinerijos katedros doktorantė. Mokslinių tyrimų kryptys: asmeninių finansų valdymas, investavimo strategijos, tvarus pensijos portfelis.

**Aušra Klimavičienė**, Vilnius Gediminas Technical University, Faculty of Business Management, Department of Finance Engineering, doctoral student. Research interests: personal finance management, investments strategies, sustainable retirement portfolio.